第８講　指数対数

31　x，y は $x \neq 1$，$y \neq 1$ をみたす正の数で，不等式

$$\log_x y + \log_y x > 2 + (\log_x 2)(\log_y 2)$$

をみたすとする．このとき x，y の組 $(x,\ y)$ の範囲を座標平面上に図示せよ．

《09 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

32 0以上の整数を10進法で表すとき，次の問いに答えよ．ただし，0は0桁の数と考えることにする．また n は正の整数とする．

(1) 各桁の数が1または2である n 桁の整数を考える．それらすべての整数の総和を T_n とする．T_n を n を用いて表せ．

(2) 各桁の数が0，1，2のいずれかである n 桁以下の整数を考える．それらすべての整数の総和を S_n とする．S_n が T_n の15倍以上になるのは，n がいくつ以上のときか．必要があれば，$0.301 < \log_{10} 2 < 0.302$ および $0.477 < \log_{10} 3 < 0.478$ を用いてもよい．

《11京大・文系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

33　次の式

$$a_1=2,\ a_{n+1}=2a_n-1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える.

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(2)　次の不等式

$$a_n{}^2-2a_n>10^{15}$$

を満たす最小の自然数 n を求めよ．ただし，$0.3010<\log_{10}2<0.3011$ であることは用いてよい.

《14京大・文系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

34　$2^{10} < \left(\dfrac{5}{4}\right)^n < 2^{20}$ を満たす自然数 n は何個あるか.

ただし, $0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ である.

《05 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　指数対数

31　x，y は $x \neq 1$，$y \neq 1$ をみたす正の数で，不等式

$$\log_x y + \log_y x > 2 + (\log_x 2)(\log_y 2)$$

をみたすとする．このとき x，y の組 $(x,\ y)$ の範囲を座標平面上に図示せよ．

《09 京大・理系》

【答】　略

【解説】　$\log_2 x = X$，$\log_2 y = Y$ とおくと

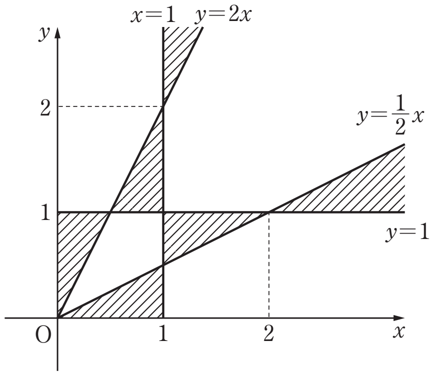
$$\begin{aligned}\log_x y + \log_y x > 2 + (\log_x 2)(\log_y 2) &\iff \frac{Y}{X} + \frac{X}{Y} > 2 + \frac{1}{X} \times \frac{1}{Y} \\ &\iff XY(X^2 + Y^2 - 2XY - 1) > 0 \\ &\iff XY(X - Y - 1)(X - Y + 1) > 0 \\ &\iff (\log_2 x)(\log_2 y)\left(\log_2 \frac{x}{2y}\right)\left(\log_2 \frac{2x}{y}\right) > 0\end{aligned}$$

となるが，ここで $\log_2 \alpha$ の符号と $\alpha - 1$ の符号は一致するので

$$\begin{aligned}\log_x y + \log_y x > 2 + (\log_x 2)(\log_y 2) &\iff (x-1)(y-1)\left(\frac{x}{2y} - 1\right)\left(\frac{2x}{y} - 1\right) > 0 \\ &\iff (x-1)(y-1)(x-2y)(2x-y) > 0\end{aligned}$$

となる．

よって求める範囲は下図の境界を含まない斜線部分．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

32　0以上の整数を10進法で表すとき，次の問いに答えよ．ただし，0は0桁の数と考えることにする．またnは正の整数とする．

(1)　各桁の数が1または2であるn桁の整数を考える．それらすべての整数の総和をT_nとする．T_nをnを用いて表せ．

(2)　各桁の数が0，1，2のいずれかであるn桁以下の整数を考える．それらすべての整数の総和をS_nとする．S_nがT_nの15倍以上になるのは，nがいくつ以上のときか．必要があれば，$0.301<\log_{10}2<0.302$および$0.477<\log_{10}3<0.478$を用いてもよい．

《11京大・文系》

【答】 (1)　$\dfrac{2^{n-1}(10^n-1)}{3}$　　(2)　8以上

【解説】 (1)　各桁が1または2であるn桁の整数は

$$111\cdots111,\ 111\cdots112,\ 111\cdots121,\ 111\cdots122,\ \cdots\cdots,\ 222\cdots221,\ 222\cdots222$$

の2^n個ある．ここで例えば，一の位の1と2はそれぞれ2^{n-1}回ずつ現れる．同様に，どの位の数に注目しても，そこでは1と2がそれぞれ2^{n-1}回ずつ現れる．

よって求める総和は

$$\begin{aligned}(1+2)(10^{n-1}+\cdots+10+1)\times 2^{n-1} &= 3\times\frac{10^n-1}{10-1}\times 2^{n-1}\\ &= \frac{2^{n-1}(10^n-1)}{3}\end{aligned}$$

よって $T_n=\boldsymbol{\dfrac{2^{n-1}(10^n-1)}{3}}$

(2)　(1)と同様に考えると

$$\begin{aligned}S_n &= (0+1+2)(10^{n-1}+\cdots+10+1)\times 3^{n-1}\\ &= 3\times\frac{10^n-1}{10-1}\times 3^{n-1}\\ &= 3^{n-2}(10^n-1)\end{aligned}$$

となる．

S_nがT_nの15倍以上になるものは

$$3^{n-2}(10^n-1)\geqq\frac{2^{n-1}(10^n-1)}{3}\times 15 \iff \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\geqq 10$$

を満たすnであるが，$\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-2}$は底が$\dfrac{3}{2}>1$なので$n$に関して増加関数で，$\left(\dfrac{3}{2}\right)^5=\dfrac{243}{32}<10$，$\left(\dfrac{3}{2}\right)^6=\dfrac{729}{64}>10$なので$n-2\geqq 6 \iff n\geqq 8$．

よって求めるnは**8以上**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

33　次の式

$$a_1=2,\ a_{n+1}=2a_n-1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える.

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(2)　次の不等式

$$a_n{}^2-2a_n>10^{15}$$

を満たす最小の自然数 n を求めよ. ただし, $0.3010<\log_{10}2<0.3011$ であることは用いてよい.

《14 京大・文系》

【答】 (1)　$a_n=2^{n-1}+1$　　(2)　26

【解説】 (1)　$a_{n+1}=2a_n-1 \iff a_{n+1}-1=2(a_n-1)$ より $a_n-1=(a_1-1)\cdot 2^{n-1}$ よって $\boldsymbol{a_n=2^{n-1}+1}$

(2)　$a_n{}^2-2a_n=(a_n-1)^2-1=(2^{n-1}+1-1)^2-1=2^{2(n-1)}-1$ より

$a_n{}^2-2a_n>10^{15} \iff 2^{2(n-1)}>10^{15}+1$ …①を満たす最小の n を考えればよい.

ここで, $2^{2(n-1)}$ は n に関する増加関数で

$0.3010<\log_{10}2<0.3011 \iff 10^{0.3010}<2<10^{0.3011}$ より $10^{14.4480}<2^{48}<10^{14.4528}$, $10^{15.050}<2^{50}<10^{15.055}$ であることと

$$10^{15}<10^{15}+1<1.024\cdot 10^{15}=\frac{2^{10}}{10^3}\cdot 10^{15}=2^{10}\cdot 10^{12}<10^{3.011}\cdot 10^{12}=10^{15.011}$$ より

①を満たす n は $2(n-1)\geqq 50 \iff n\geqq 26$ となるので求める最小値は **26**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

34　$2^{10}<\left(\dfrac{5}{4}\right)^n<2^{20}$ を満たす自然数 n は何個あるか.

ただし, $0.301<\log_{10}2<0.3011$ である.

《05 京大・理系》

【答】 31 個

【解説】 $0.301<\log_{10}2<0.3011$ より $10^{0.301}<2<10^{0.3011}$ …①である.

$\dfrac{5}{4}=\dfrac{10}{2^3}=10\cdot 2^{-3}$ であるが, ①より $10^{-0.903}>2^{-3}>10^{-0.9033}$ なので

$10^{1-0.903}>\dfrac{5}{4}>10^{1-0.9033}$ つまり $10^{0.097}>\dfrac{5}{4}>10^{0.0967}$ …②である.

ここで, ①より $10^{3.010}<2^{10}<10^{3.011}$, $10^{6.020}<2^{20}<10^{6.022}$ であり,

$\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$ は n に関する増加関数で②より $10^{2.9977}<\left(\dfrac{5}{4}\right)^{31}<10^{3.0070}$, $10^{3.0944}<\left(\dfrac{5}{4}\right)^{32}<10^{3.1040}$, $10^{5.9954}<\left(\dfrac{5}{4}\right)^{62}<10^{6.0140}$, $10^{6.0921}<\left(\dfrac{5}{4}\right)^{63}<10^{6.1110}$ なので

$2^{10}<\left(\dfrac{5}{4}\right)^n<2^{20}$ を満たす自然数は $n=32, 33, \cdots, 62$ の **31 個**.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。